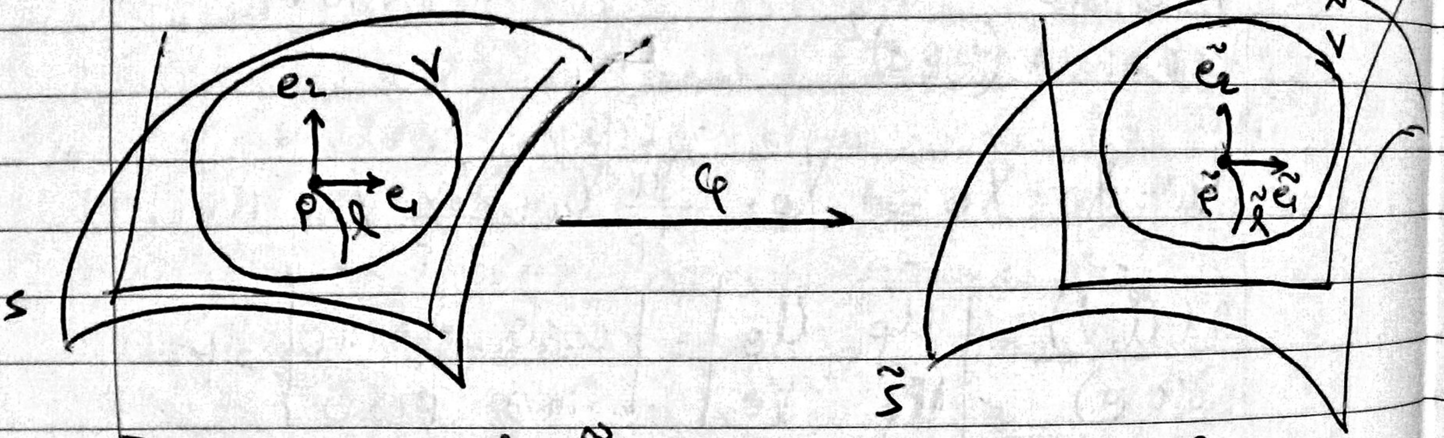
Αναλυτική Διατύπωση

Έστω $S, \tilde{S}$ επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss K.



Για κάθε $p \in S$, $\tilde{p} \in \tilde{S}$ και ορθομοναδιαίες βάσεις $\{e_1, e_2\}$ του T_pS και $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ του $T_{\tilde{p}}\tilde{S}$ με $\varphi : T_pS \to T_{\tilde{p}}\tilde{S}$, $\varphi(e_1) = \tilde{e}_1$, $\varphi(e_2) = \tilde{e}_2$.
Υπάρχει περιοχή $V = V(p)$, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{p})$ και ισομετρία $\Phi : V \to \tilde{V}$ ισομετρία, ώστε $\Phi(p) = \tilde{p}$ και $d\Phi_p = \varphi$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω S επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss τότε $\forall p, \tilde{p} \in S$, υπάρχουν περιοχές $V = V(p)$, $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{p})$ και ισομετρία $\Phi : V \to \tilde{V}$

<u>Απόδειξη (Θεωρήματος)</u>
Εισάγω συστήματα γεωδαισιακών πολικών συντ/νων στις S και $\tilde{S}$ ως εξής:
$X(\rho, \theta) = \exp_p(\rho(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2))$, (ώστε να καλύπτει την περιοχή $V \setminus \ell$)

$\tilde{X}(\rho,\theta) = \widetilde{\exp}_{\tilde{p}}\left(\rho(\cos\theta\,\tilde{e}_1 + \sin\theta\,\tilde{e}_2)\right) \quad (\tilde{v} \mid \vec{e})$

$E = 1 = \tilde{E}, \; F = 0 = \tilde{F}, \; G, \tilde{G}, \; \lim_{\rho\to 0} G = 0 = \lim_{\rho\to 0} \tilde{G}$

$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1 = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\tilde{G}})_\rho$

Από έξοχο: $(\sqrt{G})_{\rho\rho}(\rho,\theta) + K(\sqrt{G}) = 0$

$(\sqrt{\tilde{G}})_{\rho\rho} + K\sqrt{\tilde{G}} = 0.$

Περίπτωση $K=0$

$(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0 \Rightarrow (\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta) = g(\theta)$ ①

$(\sqrt{\tilde{G}})_{\rho\rho} = 0 \Rightarrow (\sqrt{\tilde{G}})_\rho(\rho,\theta) = \tilde{g}(\theta)$

ξέρω $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1 \xRightarrow{①} g(\theta) = 1$

Ομοίως, $\tilde{g}(\theta) = 1$.

Δηλαδή, $(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta) = 1 = (\sqrt{\tilde{G}})_\rho(\rho,\theta)$. Ολοκληρώνω:

$(\sqrt{G})(\rho,\theta) = \rho + h(\theta), \quad (\sqrt{\tilde{G}})(\rho,\theta) = \rho + \tilde{h}(\theta) \Rightarrow$

$G(\rho,\theta) = (\rho + h(\theta))^2, \quad \tilde{G}(\rho,\theta) = (\rho + \tilde{h}(\theta))^2$ ②

Αφού $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0 = \lim_{\rho\to 0}\sqrt{\tilde{G}} \xRightarrow{②} h = \tilde{h} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow G(\rho,\theta) = \rho^2 = \tilde{G}(\rho,\theta)$

Έχω: $\left.\begin{aligned} E&=\tilde{E}\\ F&=\tilde{F}\\ G&=\tilde{G}\end{aligned}\right\}$ $\xRightarrow{\text{Πρόταση}}$ $\varphi=\tilde{X}\circ X^{-1}$, ισομετρία

Η Φ ισομετρία μεταξύ $V\setminus l$ και $\tilde{V}\setminus\tilde{l}$. Σαν πραγματικότητα:

$\Phi=\widetilde{exp}_{\tilde{p}}\circ\varphi\circ(exp_p)^{-1}$

$exp_p: B_\varepsilon(0)\subset T_pS\to V$, $\widetilde{exp}_{\tilde{p}}: B_{\tilde{\varepsilon}}(0)\subset T_{\tilde{p}}\tilde{S}\to\tilde{V}$

$(exp_p)^{-1}: V\to B_\varepsilon(0)\subset T_pS$

Έβγαλα το συμπέρασμα στο $V\setminus l$, όμως l έχει μηδενικό μέτρο στο V, όπου $V\setminus l$ πυκνό, λόγω συνέχειας έδειξα το συμπέρασμά μου.

<u>Αν $K>0$</u> (όμοια για $K<0$)

$(\sqrt{G})(\rho,\theta)=A(\theta)\cos(\sqrt{K}\rho)+B(\theta)\sin(\sqrt{K}\rho)$. Η συνέχεια παρόμοια

<u>Θεώρημα</u>

Για κάθε σημείο $p\in S$, υπάρχει περιοχή $V=V(p)$ ώστε: για κάθε $q\in V$ υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma:[0,1]\to V$, με $\gamma(0)=p$, $\gamma(1)=q$ η οποία πληροί το εξής: $L(\gamma)\leq L(c)$ ①, όπου $c:[0,1]\to S$, $c(0)=p$, $c(1)=q$

Η ισότητα στην ①: αν $c([0,1])=\gamma([0,1])$

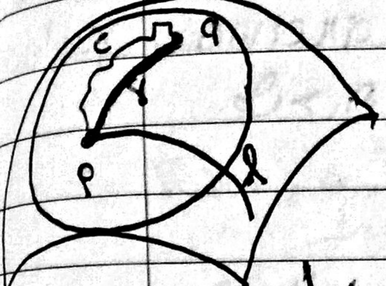
<u>Απόδειξη</u>

Έστω V κανονική περιοχή του p, δηλαδή $V=exp_p(B_\varepsilon(0))$, $B_\varepsilon(0)\subset T_pS$, ώστε: $exp_p: B_\varepsilon(0)\to V$ διαφορομορφισμός

1η περίπτωση : $c([0,1]) \subset V$

$$L(\gamma) = r$$

Έστω $X(\rho,\theta)$ σύστημα γεωδαισιακών πολικών συν/νων $0<\rho$, $0<\theta<2\pi$



$c(t) = X(\rho(t),\theta(t))$, $0<t$ και ότι η c δεν ξανατέμνει την ℓ.

$$L(c) = \int_0^1 \|c'(t)\|\,dt = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 \|c'(t)\|\,dt \quad ①$$

$$c'(t) = \rho'(t) X_\rho(\rho(t),\theta(t)) + \theta'(t) X_\theta(\rho(t),\theta(t))$$

$$\|c'(t)\|^2 = (\rho'(t))^2 \overbrace{\|X_\rho(\rho(t),\theta(t))\|^2}^{E(\rho(t),\theta(t))=1} + 2\rho'(t)\,\theta'(t) \underbrace{\langle X_\rho, X_\theta\rangle(\rho(t),\theta(t))}_{F(\rho(t),\theta(t))=0}$$
$$+ (\theta'(t))^2 \underbrace{\|X_\theta(\rho(t),\theta(t))\|^2}_{G(\rho(t),\theta(t))}$$

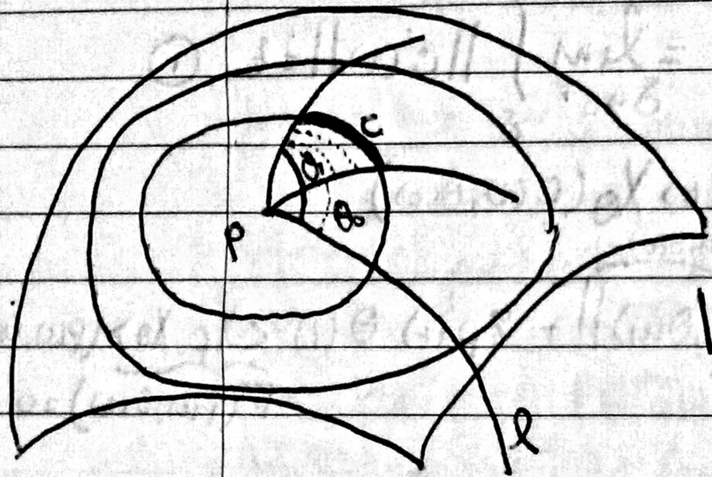
Δηλαδή, $\|c'(t)\| = \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\theta'(t))^2 G(\rho(t),\theta(t))} \geq$
$\geq \sqrt{(\rho'(t))^2} = |\rho'(t)| \geq \rho'(t)$

$$① : \int_\delta^1 \|c'(t)\|\,dt \geq \int_\delta^1 \rho'(t)\,dt = \rho(1) - \rho(\delta) \xrightarrow{\delta\to 0}$$

$$L(c) \geq \rho(1) - 0 = L(\gamma) \Rightarrow \boxed{L(c) \geq L(\gamma)}$$

Για τις άλλες περιπτώσεις, πάλι περιορίζομαι στην περιοχή.

Εφαρμογή: Έστω Σ επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K<0$. $p\in\Sigma$ και $X(\rho,\theta)$ σύστημα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων. Θα εξετάσω το μήκος του τόξου γεωδαισιακού κύκλου που περιέχεται μεταξύ των ακτινικών γεωδαισιακών $X(\rho,\theta=\theta_0)$ και $X(\rho,\theta=\theta_1)$, με $\theta_1>\theta_0$.



$$L(c)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\|c'(\theta)\|\,d\theta.$$

$$c(\theta)=X(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta),\quad \theta_0\le\theta\le\theta_1$$

$$c'(\theta)=X_\theta(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta).$$

$$\|c'(\theta)\|=\|X_\theta(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta)\|=\sqrt{G(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta)}$$

Άρα: $L(\rho)=L(c)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{G(\rho=\sigma\tau\alpha\theta,\theta)}\,d\theta$ (άλλο ρ άλλο μήκος, δηλαδή είναι συνάρτηση)

$$L'(\rho)=\frac{d}{d\rho}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{G(\rho,\theta)}\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)\,d\theta$$

$$\lim_{\rho\to0}L'(\rho)=\lim_{\rho\to0}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)\,d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\lim_{\rho\to0}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\theta_0}^{\theta_1}1\,d\theta=\theta_1-\theta_0>0.\ (*)$$

Από έξοχο έχω: $(\sqrt{G})_{\rho\rho}+K\sqrt{G}=0$

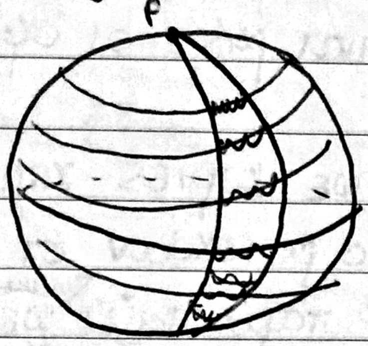
$$L''(\rho)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}(\sqrt{G})_{\rho\rho}(\rho,\theta)\,d\theta=-\int_{\theta_0}^{\theta_1}K\sqrt{G}(\rho,\theta)\,d\theta>0$$

$$\Rightarrow L'\nearrow$$

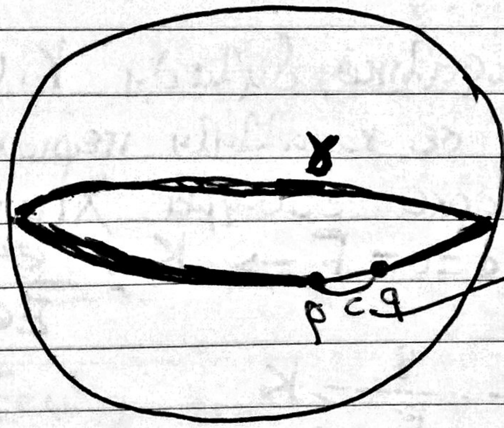
Δηλαδή, για $\rho > \rho_1 \Rightarrow L'(\rho) > L'(\rho_1) \xRightarrow{\rho_1 \to 0}$

$$\Rightarrow L'(\rho) \geq \lim_{\rho_1 \to 0} L'(\rho_1) \overset{(*)}{=} \theta_1 - \theta_0 > 0 \Rightarrow L \nearrow$$

<u>Π.χ για $K>0$ δεν ισχύει</u>



S^2, γεωδαισιακές: μέγιστοι κύκλοι.



Αυτό που κάτω πειράζω λίγο τη γεωδαισιακή για να πάω στη c.
Δηλαδή, $L(c) < L(\gamma)$

Αν είναι ελάχιστο τότε είναι κρίσιμο σημείο. Αυτό λέει ουσιαστικά

Θεώρημα: Αν $c:[0,l] \to S$ καμπύλη με άκρα $p = c(0)$, $q = c(l)$ που ελαχιστοποιεί το μήκος (δηλαδή $L(c) \leq L(\tilde{c})$, $\tilde{c}$ καμπύλη με άκρα p, q), τότε η c είναι γεωδαισιακή.

Ερώτημα: Ποιες είναι οι συμπαγείς επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss;
[π.χ: σφαίρες]
Απάντηση

Θεώρημα Liebmann: Οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss είναι μόνο οι σφαίρες.

ΛΗΜΜΑ: Έστω S επιφάνεια με κύριες καμπυλότητες $k_1 \geq k_2$. Υποθέτω ότι σε σημείο p ισχύουν τα ακόλουθα:
i) $K(p) > 0$ και ii) Η k_1 στο p παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και
η k_2 στο p παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο
Τότε το p είναι ομφαλικό σημείο

Απόδειξη
Έστω ότι το p όχι ομφαλικό, δηλαδή $k_1(p) > k_2(p)$
Λόγω συνέχειας $k_1 > k_2$ σε κατάλληλη περιοχή του p.
Τότε γύρω απ' το p υπάρχει σύστημα $X(u,v)$ γραμμών καμπυλότητας. Οπότε $f = 0 = F \Rightarrow K = \frac{eg}{EG}$

$$H = \frac{Eg + Ge}{2EG} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{G} = K \\ \frac{1}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) = H \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{k_1, k_2\} = \left\{\frac{e}{E}, \frac{g}{G}\right\}$. Υποθέτω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $k_1 = \frac{e}{E}$, $k_2 = \frac{g}{G}$

Από εξισώσεις Mainardi – Codazzi:

$$\begin{cases} e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) = \frac{E_v}{2}(k_1 + k_2) \\ g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) = \frac{G_u}{2}(k_1 + k_2) \end{cases}$$

$$(k_1)_v = \left(\frac{e}{E}\right)_v = \frac{1}{E^2}\left(E e_v - E_v e\right) = \frac{1}{E^{\cancel{2}}}\left(\cancel{E}\,\frac{E_v}{2}(k_1+k_2) - E_v k_1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E(k_1)_v = \dfrac{E_v}{2}(k_2-k_1) \\ G(k_2)_u = \dfrac{G_u}{2}(k_1-k_2) \end{cases}$$

Από έξοχο: $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] \Leftrightarrow$

① $-2EGK = E_{vv} + G_{uu} + M E_v + N G_u$, M, N: λείες συναρτήσεις.

Έχω: $E_v = -2E\frac{(k_1)_v}{k_1-k_2} \Rightarrow E_{vv} = -\frac{2E}{k_1-k_2}(k_1)_{vv} + (\dots)(k_1)_v$ ②

$G_u = 2G\frac{(k_2)_u}{k_1-k_2} \Rightarrow G_{uu} = \frac{2G}{k_1-k_2}(k_2)_{uu} + (\dots)(k_2)_u$ ③

(*)

① $\xRightarrow{②,③}$ $-2EGK = -\frac{2EG}{k_1-k_2}(k_1)_{vv} + \frac{2G}{k_1-k_2}(k_2)_{uu} + (\dots)(k_1)_v + (\dots)(k_2)_u$

Επειδή $k_1(p) = \max k_1$, $k_2(p) = \max k_2$, η (*) στο p δίνει:

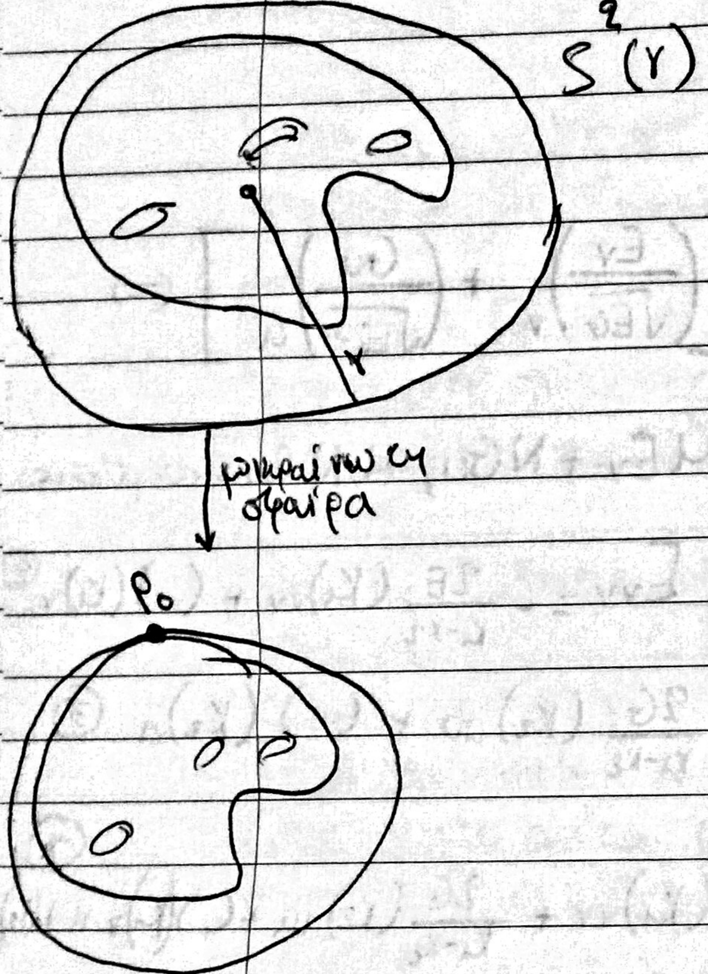
$\left[(k_1)_v = 0 = (k_2)_u,\ (k_1)_{vv} \leq 0,\ (k_2)_{uu} \geq 0\right]$

$$-2EGK = \underbrace{-\frac{2EG}{k_1-k_2}(k_1)_{vv}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{2G}{k_1-k_2}(k_2)_{uu}}_{\geq 0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow -2EGK(p) \geq 0$. Άτοπο!

Θεώρημα: Κάθε συμπαγής επιφάνεια έχει ένα τουλάχιστο ελλειπτικό σημείο (δηλ. σημείο με $K>0$).

Απόδειξη



$$K(p_0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

Απόδειξη (Θεωρήματος Liebmann)

Λόγω του πάνω θεωρήματος $K>0$.

$k_1 : S \to \mathbb{R}$ συνεχής, S συμπαγής $\Longrightarrow \exists\, p_0 \in S : k_1(p_0) = \max k_1$ χωρίς βλάβη

$K = k_1 k_2 > 0 \Rightarrow k_2$ στο p_0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Έστω $p \in S$: $k_1(p) \leq k_1(p_0)$ $\underline{\text{ΛΗΜΜΑ}}$ $k_2(p_0) \leq k_2(p)$

$\Rightarrow k_1(p) \leq k_2(p) \xrightarrow{k_1 \geq k_2} k_1(p) = k_2(p)$.

$\Rightarrow$ Η S είναι τμήμα σφαίρας